Inhaltsverzeichnis

1 Kreative Abduktion

1.1 Das Problem

> The initial stage, the act of concieving or inventing a theory, seems to me neither to call for logical analysis nor to be susceptible of it.
> (Popper, The Logic of Discovery, S. 31, zitiert in Anderson 1986, S. 152)

> Think of what trillions of trillions of hypotheses might be made of which only one is true; and yet after two or three – or at the very most a dozen guesses, the physicist hits pretty nearly on the correct hypothesis. By chance he would have not been likely to do so in the whole time that has elapsed since the earth was solidified.
> (5.172 Peirce 1934)

Abduktion nach Charles Sanders Peirce hat das Ziel, die Invention von Theorien logisch zu beschreiben. Peirce sieht Abduktion als eine dritte Schlussform neben Deduktion und Induktion. Bei Deduktion und Induktion ist eine Hypothese gegeben, die geprüft werden soll. Ein abduktiver Schluss resultiert hingegen in einer möglichen Hypothese, die dann mit Deduktion oder Induktion geprüft werden kann (Frankfurt 1958, S. 593).

In dieser Hausarbeit werde ich angehen, ob man die Entstehung eines abstrakten mathematischen Begriffes durch Abduktion beschreiben kann. Dazu diskutiere ich zunächst, welche Form der Abduktion geeignet ist, um das Entstehen von neuen Begriffen beschreiben zu können. Dann stelle ich zwei Theorien vor, die jeweils Einschränkungen setzen, mithilfe denen man sinnvolle von sinnlosen abduktiven Schlüssen trennen kann. Nachdem ich dann ein konkretes Beispiel für die Entstehung eines mathematischen Begriffes gegeben habe, diskutiere ich, ob man auch in der Mathematik von Abduktion sprechen kann, und ob die Einschränkungen auch für die Mathematik angebracht sind.

1.2 Selektive Abduktion

Die genaue Definition der Abduktion hat sich in Peirces Werk gewandelt (Anderson 1986, 150f). Gerhard Schurz gibt zwei Definitionen für unterschiedliche Formen der peirceschen Abduktion, selektive (*selective*) und kreative (*creative*) Abduktion[1]. Selektive Abduktion ist eine Art umgekehrte Deduktion, die das Ziel hat, eine plausible, wahrscheinliche Erklärung für einen beobachteten empirischen Fakt zu finden (Schurz 2016, S. 495). Sie ist vergleichbar mit „inference to the best explanation“ (ebd., S. 494). Ein Beispiel für selektive Abduktion ist:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Gesetz: Wenn es regnet, ist die Straße nass } (\forall x(Cx \to Ex)) \\ \text{Fall: Die Straße ist nass } (Ea)\end{array}}{\text{Hypothese: Es hat (wahrscheinlich) geregnet } (Ca)}$$

(vgl. ebd., S. 495)

Mit der Definition der selektiven Abduktion gibt es einige Probleme, wenn wir Abduktion als Quelle von Hypothesen betrachten wollen. Die selektive Abduktion ist zwar auch eine Quelle einer Hypothese, sie überschneidet sich aber in ihrer Funktion mit der Induktion: Beide Schlussformen versuchen, eine Erklärung als wahrscheinlich zu akzeptieren. Vor allem ist selektive Abduktion so eng gefasst, dass in einem selektiv abduktiven Schluss keine neuen Begriffe entstehen können. Nur Begriffe, die es schon in der Prämisse gibt, können in der Konklusion vorkommen. Somit kann man die Einführung von neuen Theorien und neuen abstrakten Konzepten durch selektive Abduktion nicht beschreiben (Anderson 1986, S. 148–149).

1.3 Kreative Abduktion

Die kreative Abduktion kann hingegen neue Begriffe einführen. Die Validität einer kreativen Abduktion hängt auch nicht mit der Wahrscheinlichkeit ihrer Konklusion zusammen (ebd., S. 151). Peirce beschreibt das Schema der kreativen Abduktion so:

> The surprising fact, C, is observed.
> But if A were true, C would be a matter of course.
> Hence, there is reason to suspect that A is true.
> (5.189 Peirce 1934)

Harry Frankfurt bezweifelt, ob der neu eingeführte Begriff in der kreativen Abduktion (im Beispiel heißt er A) tatsächlich neu ist: A taucht ja auch in der zweiten Prämisse des Arguments auf. Also, so Frankfurt, kann A nicht in der kreativen Abduktion entstanden sein, und muss vor der Abduktion erfunden worden sein (Frankfurt 1958, S. 594). Dieses Problem lässt sich allerdings leicht lösen: A muss nicht unbedingt in der Prämisse stehen, damit kreative Abduktion im Allgemeinen funktioniert (siehe auch Anderson 1986, S. 156). Es gibt kein „allgemeines logisches Schema“ für kreative Abduktion, auf das sich jede Quelle einigt. Schurz gibt ein Beispiel einer kreativen Abduktion in einem relativ allgemeinen Schema an, bei der der neu erfundene Begriff erst in der Konklusion auftaucht:

$$\frac{\text{Bekannte Phänomene: Observierbare Eigenschaften von Substanzen (z.B. Gold, Eisen, Stein)}}{\text{Abduktive Hypothese: Molekulare Modelle dieser Substanzen}}$$

(Schurz 2016, S. 495)

[1] Der Einfachheit halber werde ich von nun an diese Begriffe verwenden. Dabei ist zu bedenken, dass nur Schurz diese Begriffe nutzt und alle anderen Quellen beide Formen einfach „Abduktion“ nennen.

1.4 Ist kreative Abduktion ein logischer Schluss?

Es gibt aber eine tiefergehende Kritik Frankfurts an der Definition von Abduktion als logischen Schluss. Es ist nach Frankfurt ein Widerspruch, wie Peirce zu behaupten, dass neue Begriffe in einer logischen Operation generiert werden, und gleichzeitig der Auffassung zu sein, dass neue Ideen aus „Geistesblitzen“ generiert werden (Frankfurt 1958, S. 594):

> It [the abductive suggestion] is an act of *insight*, although extremely fallible insight. It is true that the different elements of the hypothesis were in our minds before; but it is the idea of putting together what we had never before dreamed of putting together which flashes the new suggestion before our contemplation.
> (5.182 Peirce 1934)

Frankfurt argumentiert, dass nicht die Abduktion selbst neue Ideen einführt, sondern somit abduktive Schlüsse höchstens eine Art Filter sein können, durch die neue Ideen in das ernsthafte Denken gelangen (Frankfurt 1958, S. 595). Die Ideen selbst werden einfach kreativ geraten.

Anderson erwidert, dass hier per se kein Widerspruch besteht. Peirce sehe Abduktion explizit als „inference and insight“ (Anderson 1986, S. 156). Der „Geistesblitz“ bzw. der abduktive Instinkt („abductive instict“, (ebd., S. 159)) und der abduktive Schluss sind nach Anderson aber nicht dasselbe. Der Instinkt sei eine notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für den Schluss. Es gäbe keinen Grund, wieso abduktive *Schlüsse* dann nicht logische Form haben können (ebd., S. 159).

Frankfurt und Anderson sind sich einig, dass die logische Form von Abduktion generell für die Einführung von neuen Begriffen genutzt werden kann (auch wenn Abduktion vielleicht nicht ein notwendiger Bestandteil dieses Prozesses ist, sondern nur eine Beschreibungsmethode). Wenn wir dies akzeptieren, so besteht immer noch die Anfangsfrage von Peirce: Wie kann es sein, dass Menschen nach wenigen Rateversuchen auf eine richtige oder zumindest plausible Hypothese kommen?

2 Regeln der Abduktion

Mit unserem bisher eingeführten Abduktionsvoraussetzungen kann man beliebige sinnlose Erklärungen oder Begriffe einführen (Schurz 2016, S. 496). Das Problem ist hierbei nicht, dass abduktiv hergeleitete Hypothesen *falsch* sein können: die Abduktion hat ja nicht den Anspruch, korrekt zu sein. Vielmehr ist das Problem, dass wir die Abduktion noch nicht auf hinreichend plausible Erklärungen eingeschränkt haben, sodass die Anzahl von Möglichkeiten für plausible Theorien sich verringert. Ich werde nun Voraussetzungen von Peirce und Schurz für „sinnvolle“ kreative Abduktionen vorstellen, die uns näher zur Lösung dieses Problems führen sollen, und diese dann später anhand des mathematischen Beispiels diskutieren.

2.1 Peirces Abduktionsvoraussetzungen

Peirce gibt zwei Voraussetzungen an, die eine Proposition erfüllen muss, um als Hypothese zu gelten:

1. Sie muss Fakten erklären,
2. Sie muss experimentell verifizierbar oder falsifizierbar sein.
   (5.189, 5.197 Peirce 1934)

Durch Abduktion erkennen wir nach Peirce, dass eine Proposition eine Arbeitshypothese ist, also eine mögliche Wahrheit, die man testen kann.

2.2 Schurz' Abduktionsvoraussetzungen

Schurz stellt drei stärkere Voraussetzungen an kreative Abduktionen, die sie von rein spekulativen Abduktionen absetzen. (Ab hier nennt Schurz nur die Abduktionen „kreativ", die diesen Voraussetzungen folgen.)

1. Kreative Abduktionen liefern Vereinheitlichung („provide unification"),
2. Kreative Abduktionen liefern Erklärungen für gemeinsame Ursachen („common-cause explanations"),
3. Kreative Abduktionen liefern neue Vorhersagen, die unabhängig getestet werden können. (Schurz 2016, S. 496)

Schurz argumentiert, dass die Prämissen in kreativen Abduktionen nicht einzelne Ereignisse sind, sondern empirische Regelmäßigkeiten (ebd., S. 496). Erst, wenn eine Abduktion mehrere *korrelierte Dispositionen*[2] erklärt, ist sie eine vereinheitlichende Abduktion, erfüllt also die erste Voraussetzung. Wenn man zum Beispiel behauptet, dass Opium schläfrig macht, weil es die virtus dormitiva besitzt (ebd., S. 497) vereinheitlicht man nicht, sondern fügt nur weitere Begriffe hinzu. Mit der virtus dormitiva erklärt man nur eine Disposition, nämlich „macht schläfrig". Eine vereinheitlichende Abduktion hingegen wäre, dass man bestimmten Stoffen die Disposition *hydrophil* zuschreibt und mit dieser Disposition Regelmäßigkeiten vereinheitlicht, die alle diese Stoffe teilen. Mit dieser Disposition erklärt man neben „löst sich in Wasser" zum Beispiel auch „löst sich nicht in Öl" (ebd., S. 498).

Aus der ersten Voraussetzung folgt noch nicht, dass die abduzierte Proposition eine mögliche Wahrheit ist. Schurz behauptet, wenn ein Gegenstand zwei korrelierende Dispositionen hat, die unabhängig durch menschliche Interventionen getestet werden können und die keine Spezialfälle voneinander sind, so muss ihnen eine gemeinsame Ursache zugrundeliegen[3] (ebd., 499ff). Allerdings müssen nicht alle Dispositionen eines Gegenstands untereinander korreliert sein oder dieselbe Ursache haben. Es können auch mehrere Ursachen für Dispositionen verantwortlich sein, die jeweils untereinander eine geringe Korrelation aufweisen (ebd., S. 501).

Mit der dritten Voraussetzung meint Schurz, dass wir in der Lage sein müssen, die Hypothese auf neue Beobachtungen anzuwenden. Wenn eine neue Substanz eine der hinreichenden Dispositionen besitzt, können wir dann voraussagen, dass ihr auch die Ursache zugrundeliegt und sie damit alle anderen korrelierten Dispositionen besitzt (ebd., 503f).

2.3 Diskussion der Abduktionsvoraussetzungen

Peirces Voraussetzungen sind wesentlich schwächer als die von Schurz. Schurz geht es explizit um die Entdeckung realer Ursachen, Peirce möchte nur „die Fakten erklären". Schurz' Voraussetzungen halte ich für angebracht, wenn man Abduktionen in empirischen Wissenschaften betrachtet. Es leuchtet ein, dass man bei der Interaktion mit der Außenwelt gemeinsame Ursachen aus Korrelationen ableitet. Aus unkorrelierten Beobachtungen können wir keine sinnvollen empirischen Theorien formulieren. Wir wollen ja plausible Arbeitshypothesen vom „Rauschen" der vielen anderen Möglichkeiten, wie eine empirische Theorie aussehen könnte, abgrenzen. Auch Theorien, die Schurz' dritter Voraussetzung nicht folgen, aus

[2]Dispositionen folgen aus Regelmäßigkeiten: wenn ein Objekt x eine Disposition D hat, dann hat es unter bestimmten Bedingungen C_n zur allen Zeiten t die Reaktionen R_n, also $\forall x(Dx \leftrightarrow \forall t(C_n xt \to R_n xt))$ (vgl. Schurz 2016, S. 497). Zum Beispiel kann man die Disposition Dx als „x löst sich in Wasser", C_1xt als „x wird zur Zeit t in Wasser gelegt" und R_1xt als „x löst sich zur Zeit t auf" wählen.

[3]Dies scheint sich erst einmal damit zu widersprechen, dass Korrelation nicht Kausalität impliziert. Schurz begründet seine These mit der sogenannten kausalen Markovbedingung. Er geht nicht weiter darauf ein, wieso man diese für abduktive Schlüsse akzeptieren sollte. Nach Hausman und Woordward ist es aber hilfreich, die kausale Markovbedingung für heuristische Zwecke anzunehmen. Siehe auch Hausman und Woodward 1999, S. 580.

denen man also nicht Wissen über neue Objekte ableiten kann, können unsere Erkenntnis nicht maßgeblich erweitern, da sie keine Allgemeingültigkeit fordern können. Allerdings sind Schurz' Voraussetzungen nur auf empirische Wissenschaften ausgerichtet, und wie wir später sehen werden, scheitern sie daher grundsätzlich an Abduktionen in der Mathematik (wenn es denn so etwas gibt).

3 Herleitung von abstrakten mathematischen Begriffen am Beispiel von Gruppen

Nun wende ich die Abduktion auf die Einführung eines abstrakten mathematischen Begriffes an. Als Beispiel für einen solch einen Begriff werde ich die Gruppe vorstellen. Zunächst motiviere ich den Gruppenbegriff durch die Symmetriegruppe. Aus Symmetriegruppen lässt sich dann die abstrakte Gruppe ableiten. Ich werde Beispiele geben, wie man diese abstrakte Vorstellung der Gruppe in völlig anderen Kontexten als geometrische Symmetrie verwenden kann, und dass man Erkenntnis über alle Gruppen durch den abstrakten Gruppenbegriff gewinnen kann.

3.1 Symmetriegruppen

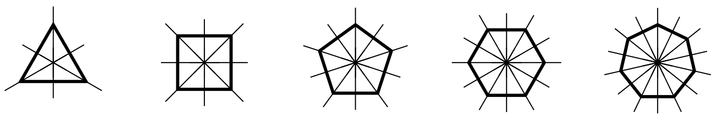

Abbildung 1: n-Ecke mit Spiegelsymmetrieachsen

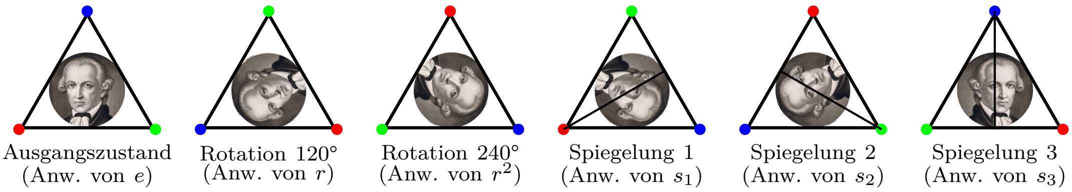

Abbildung 2: Das Dreieck in Ausgangsposition 1 nach einmaliger Anwendung der sechs Drehungs- und Spiegelungstransformationen. Kant dient lediglich als Orientierungshilfe

Schauen wir uns zunächst Symmetrien der sogenannten regulären Polygone an. Ein reguläres Polygon ist ein ebenes Vieleck, dessen Winkel alle gleich groß und Seiten alle gleich lang sind. Zu jeder ganzen Zahl $n \geq 3$ gibt es genau ein reguläres Polygon mit n Punkten, ohne Rotation, Größe oder Position zu betrachten („das n-Eck") (Brieskorn 1983, S. 3–4). Beispiele für n-Ecke finden sich in Abbildung 1.

n-Ecke sind in gewisser Weise symmetrisch: sie können an manchen Achsen gespiegelt werden, ohne dass sie ihre Form, ihre Position oder ihre Rotation verändern (in Abbildung 1 sind diese Spiegelachsen eingezeichnet). Außerdem können sie ohne Veränderung in gewissen Winkeln um ihre Mitte gedreht werden, beim Dreieck zum Beispiel um 120° und 240°.

Betrachten wir das Dreieck. Wenn die Punkte des Dreiecks eindeutig markiert werden, sodass man sie bei Rotationen und Spiegelungen verfolgen kann, kann ein Dreieck durch Drehung und Spiegelung in genau sechs verschiedene Zustände befördert werden, in denen es ein Dreieck an der gleichen Position mit der gleichen Rotation bleibt (siehe Abbildung 2).

Es gibt sechs Drehungen und Spiegelungen (wir nennen sie Transformationen), die das Dreieck in sich selbst überführen. Diese sechs Transformationen sind:

- Die Identitätstransformation e, die ein beliebiges gegebenes Dreieck nicht verändert.

$\circ$	e	r	r^2	s_1	s_2	s_3
e	e	r	r^2	s_1	s_2	s_3
r	r	r^2	e	s_3	s_1	s_2
r^2	r^2	e	r	s_2	s_3	s_1
s_1	s_1	s_2	s_3	e	r	r^2
s_2	s_2	s_3	s_1	r^2	e	r
s_3	s_3	s_1	s_2	r	r^2	e

Abbildung 3: Vollständige Tabelle von Hintereinanderausführungen von Dreieckstransformationen. Zuerst eine obere Transformation ausführen, dann eine linke, ist dasselbe wie die mittige Transformation der beiden auszuführen

Abbildung 4: Jeweils Muster 1 und 2 und Muster 3 und 4 haben dieselbe Symmetriegruppe, wenn man sie auf einer unbegrenzten Fläche auslegt (Muster aus Owen 1856)

- Die Drehungstransformation r, die ein Dreieck um 120° gegen den Uhrzeigersinn dreht.
- Die Drehungstransformation r^2, die ein Dreieck um 240° gegen den Uhrzeigersinn dreht.
- Die Spiegelungstransformationen s_1, s_2, s_3, die ein Dreieck an den Mittelsenkrechten spiegeln.

Abbildung 2 zeigt jeweils den Effekt der sechs Transformationen auf den Ausgangszustand des Dreiecks.

Diese Transformationen können auch hintereinander ausgeführt werden. Wenn wir das Dreieck zum Beispiel zuerst um 120° drehen und dann Spiegelung 1 ausführen, schreiben wir dafür $s_1 \circ r$ (Hintereinanderausführungen werden „falsch herum“ geschrieben). $s_1 \circ r$ ist wiederum eine Transformation. Zuerst r und dann s_1 anzuwenden, hat auf jedes Dreieck denselben Effekt wie s_2 auszuführen: es gilt $s_1 \circ r = s_2$.

Wenn man einen beliebigen Zustand des Dreiecks zunächst um 120° dreht und dann um 240° dreht, ist es so, als hätte man gar nichts getan. Also: $r^2 \circ r = e$. Man sagt, r^2 macht r rückgängig. *Jede* Dreh- oder Spiegeltransformation kann so durch eine andere Transformation oder sich selbst rückgängig gemacht werden. Zum Beispiel macht r auch r^2 rückgängig, und s_1 macht sich selbst bei doppelter Ausführung rückgängig.

Die Menge der sechs Transformationen $S = \{e, r, r^2, s_1, s_2, s_3\}$ mit der Hintereinanderausführungsverknüpfung $\circ$ hat also unter Anderem folgende Eigenschaften:

- Für alle Transformationen $f, g \in S$ gibt es eine Transformation $f \circ g \in S$, die Hintereinanderausführung von zuerst g und dann f.
- Es gibt eine Transformation e, die nichts tut. Für sie gilt $e \circ f = f \circ e = f$ für alle Transformationen $f \in S$, also wenn man sie hinter oder vor einer anderen Transformation ausführt, bleibt diese Transformation dieselbe.
- Für jede Transformation $g \in S$ gibt es eine Transformation f, die g rückgängig macht, also $f \circ g = g \circ f = e$.
- Für Transformationen $g, f, h \in S$ gilt $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$ (die Evaluationsreihenfolge von $\circ$ ist irrelevant).
  (vgl. Brieskorn 1983, S. 26, 54)

3.2 Andere Gruppen

Die Addition auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ weist eine ganz ähnliche Struktur auf:

- Für alle Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Zahl $x + y \in \mathbb{Z}$.
- Es gibt eine Zahl 0, für die $0 + x = x + 0 = x$ für alle Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ gilt.
- Für jede Zahl $x \in \mathbb{Z}$ gibt es eine Zahl $-x \in \mathbb{Z}$, für die $x + (-x) = -x + x = 0$ gilt.
- Für Zahlen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt $(x + y) + z = x + (y + z)$.
  (vgl. Brieskorn 1983, S. 40)

Dasselbe Muster taucht auch an vielen anderen Orten in der Mathematik auf. Beispielsweise folgen Permutationen wie Karten mischen oder Zauberwürfel drehen (ebd., S. 45), Bewegungen auf der Ebene oder im Raum (ebd., S. 51), die Multiplikation ohne Null (ebd., S. 41), und so weiter denselben Gesetzen. Man kann sagen, alle diese Beispiele sind Spezialfälle der *abstrakten Gruppe*, die wir jetzt genau so definieren:

Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfungsoperation $\circ$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- Den Elementen $a, b \in G$ ordnet $\circ$ ein neues Element $a \circ b \in G$ zu.
- Es gibt ein *neutrales* Element $e \in G$, sodass für alle Elemente $a \in G$ gilt: $a \circ e = e \circ a = a$.
- Zu jedem Element $a \in G$ gibt es ein *inverses* Element $b \in G$ mit $a \circ b = b \circ a = e$.
- Für jedes Tripel a, b, c von Elementen in G gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
  (vgl. ebd., S. 37)

Jetzt haben wir viele Operationen vereinheitlicht. Was wir über die abstrakte Gruppe sagen können, stimmt unmittelbar für jede Gruppe. Zum Beispiel kann man mit der Definition der abstrakten Gruppe beweisen, dass es in jeder Gruppe nur genau ein einziges neutrales Element geben kann, und dass jedes Element nur genau eine Inverse haben kann (ebd., S. 37). Dasselbe wissen wir dann auch über ganze Zahlen und Dreieckssymetrie, ohne diese beiden Fälle im Genauen zu überlegen. Abstrakte Strukturen, die Anwendung in unterschiedlichen Gebieten der Mathematik haben, gibt es viele, andere sind zum Beispiel Ringe, Körper und Vektorräume (ebd., S. 160, 202).

4 Diskussion der Gruppenabduktion

Haben wir jetzt einen kreativ abduktiven Schluss gemacht? Das Schema des Schlusses könnte man ungefähr so aufschreiben:

$$\frac{\text{Bekannte Phänomene: Symmetriegruppen, Addition auf ganzen Zahlen, etc. teilen sich dieselben Eigenschaften}}{\text{Abduktive Hypothese: Alle diese Konzepte sind Spezialfälle der Gruppe und alle Gruppen haben diese Eigenschaften}}$$

Der neu eingeführte Begriff ist *Gruppe*.

Wir haben einen neuen Begriff eingeführt aus Beobachtungen, die wir an einzelnen Fällen gemacht haben. Wenn wir akzeptieren, dass es in der Mathematik Wissen gibt (siehe z.B. Resnik 1982, S. 101), haben wir durch die die Einführung des Gruppenbegriffes neue nützliche Erkenntnisse über unsere Beispiele gewonnen. Ich behaupte, dieser Schluss ist also in seiner breiten Definition abduktiv. Aber können wir hier die Bedingungen anwenden, die Peirce bzw. Schurz für Abduktion aufgestellt haben?

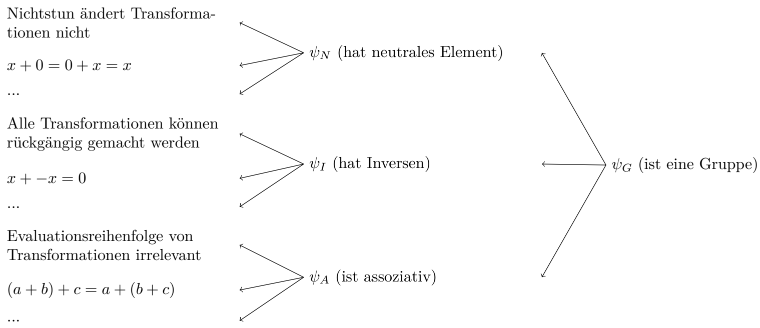

Abbildung 5: Abduktion der Gruppe schematisch

4.1 Abduktionsvoraussetzungen und die Abduktion der Gruppe

Wir erinnern uns an Schurz' drei Voraussetzungen für kreative Abduktionen:

1. Kreative Abduktionen liefern Vereinheitlichung („provide unification"),
2. Kreative Abduktionen liefern Erklärungen für gemeinsame Ursachen („common-cause explanations"),
3. Kreative Abduktionen liefern neue Vorhersagen, die unabhängig getestet werden können.
   (Schurz 2016, S. 496)

Die Abduktion der Gruppe erfüllt zwar vielleicht die erste Voraussetzung, da sie durch den Oberbegriff der Gruppe Eigenschaften von verschiedenen Konzepten vereinheitlicht (auch, wenn Schurz in der Erklärung der ersten Voraussetzung schon den Begriff der Korrelation verwendet hat). Die anderen Voraussetzungen sind aber nicht erfüllt. Man kann eben nicht sagen, dass durch das Gruppe-sein einer Struktur ihre Dispositionen *kausal verursacht* werden. Außerdem sind Dispositionen der Gruppe, die nicht Spezialfälle von anderen Dispositionen sind, nicht unmittelbar untereinander korreliert. Wenn eine Struktur ein neutrales Element hat, bedeutet das nicht, dass jedes Element der Struktur eine Inverse haben muss. Also liefert die Gruppe auch keine neuen Vorhersagen darüber, dass eine Struktur, die bestimmte Dispositionen erfüllt, alle Dispositionen erfüllen muss.

4.2 Lösungen für Probleme mit mathematischer Abduktion

Sind Schurz' Voraussetzungen also per se für mathematische Abduktion ungeeignet? Schurz sagt zwar auch, dass nicht alle Abduktionen kausal sein müssen (ebd., S. 503), somit bleibt uns aber nur noch die Voraussetzung der Vereinheitlichung, und wir haben nicht unbedingt an Wissen gewonnen.

Peirce sieht die „Thirdness" (5.209 Peirce 1934), mit der er vermutlich das abstrakte Denken meint[4], als direkt wahrnehmbar und nicht unmittelbar von empirischen Beobachtungen trennbar (5.209, 5.212 ebd.), und somit auf die Abduktion anwendbar.

> The elements of every concept enter into logical thought at the gate of perception and make their exit at the gate of purposive action; and whatever cannot show their passports at both those two gates is to be arrested as unauthorized by reason.
> (5.212 ebd.)

Somit erinnern wir uns noch einmal an Peirces Voraussetzungen an die Abduktion:

1. Sie muss Fakten erklären,
2. Sie muss experimentell verifizierbar oder falsifizierbar sein.

[4] vgl. Burch 2018, der Begriff ist bei Peirce nicht eindeutig.

(5.189, 5.200 Peirce 1934)

Unter der Annahme, dass es mathematisches Wissen gibt und wir durch mathematische Theorien neue Erkenntnisse gewinnen können, kann man die erste Bedingung an unsere Abduktion anwenden. Dass zwei mathematische Strukturen Gruppen sind, erklärt, dass sie denselben Mustern folgen, dass sie bestimmte Eigenschaften haben, die aus der Gruppendefinition folgen, und so weiter. Man könnte zum Beispiel auch die Erkenntnis gewinnen, dass zwei spezifische Gruppen *isomorph* sind, also bis auf Umbenennung gleich, und damit weitere Ähnlichkeiten zwischen diesen Gruppen erklären.

Entfernen wir das „experimentell" in der zweiten Bedingung, ist sind diese auch an unsere mathematische Abduktion anwendbar. Ich denke, es gibt ein gutes Argument dafür, dass abduktiv geschlossene Hypothesen nicht unbedingt experimentell verifizierbar sein müssen, wenn sie schon rein deduktiv verifizierbar sind. Ob Peirce dies so gesehen hätte, kann ich allerdings nicht bewerten.

5 Fazit

Die kreative Abduktion ist ein logischer Schluss, in dem Begriffe eingeführt werden können. Peirce und Anderson sehen sie als die Quelle von neuen Theorien, Frankfurt nur als Möglichkeit, menschliche Einsicht zu beschreiben. Kreative Abduktion hat das Problem, dass man durch sie alle möglichen sinnlosen Hypothesen ableiten kann. Menschen kommen aber häufiger auf sinnvolle als auf sinnlose Hypothesen. Um sinnlose von sinnvollen Hypothesen abzugrenzen, haben Schurz und Peirce jeweils Anforderungen an sinnvolle kreative Abduktionen gesetzt.

Auch, wenn die kreative Abduktion hauptsächlich in Verbindung mit den empirischen Wissenschaften gebracht wird, kann man mit Einschränkungen auch die Einführung von neuen mathematischen Begriffen mit kreativer Abduktion beschreiben. Die relativ strengen Bedingungen, die Schurz an kreative Abduktion stellt, sind hier aber nicht mehr anwendbar.

Die Frage, wieso Menschen öfter auf sinnvolle Theorien kommen als auf sinnlose, oder wieso manchen Menschen plötzlich bahnbrechende Erklärungen für Phänomene einfallen, bleibt hier meiner Meinung nach immer noch offen. Das reine Schema der kreativen Abduktion führt dabei nicht zum Ziel, und weder Peirce noch Schurz schaffen es, *wirklich gute* Bedingungen für kreativ abduktive Schlüsse zu liefern, mit denen man diese Frage beantworten könnte.

Literatur

Anderson, Douglas R. (1986). „The evolution of Peirce's concept of abduction". In: *Transactions of the Charles S. Peirce Society* 22.2, S. 145–164.

Brieskorn, Egbert (1983). *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I.* Vieweg.

Burch, Robert (2018). „Charles Sanders Peirce". In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Hrsg. von Edward N. Zalta. Winter 2018. Metaphysics Research Lab, Stanford University.

Frankfurt, Harry G. (1958). „Peirce's notion of abduction". In: *Journal of Philosophy* 55 (14), S. 593–597.

Hausman, DM und Woodward, J (Dez. 1999). „Independence, invariance and the causal Markov condition". In: *The British Journal for the Philosophy of Science* 50.4, S. 521–583.

Owen, James (1856). *The grammar of ornament.* Day und Son.

Peirce, Charles S. (1934). *Collected papers of Charles Sanders Peirce.* Hrsg. von C. Hartshorne und P. Weiss. Bd. 5. Harvard University Press.

Resnik, Michael D. (1982). „Mathematics as a science of patterns: epistemology". In: *Noûs* 16.1, S. 95–105.

Schurz, Gerhard (2016). „Common cause abduction: The formation of theoretical concepts and models in science“. In: *Logic Journal of the IGPL* 24 (4), S. 494–509.